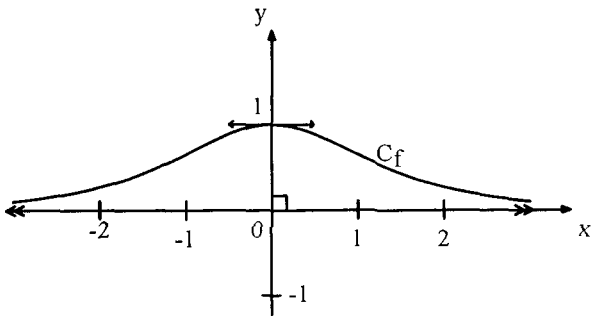
et 0 est un minorant de f $\Rightarrow \forall x \in IR$ on a : $0 < f(x) \leq 1$.

b-



• $\lim\limits_{\pm\infty} f = 0 \Rightarrow$ la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $\pm\infty$.

2/a- la fonction tg : $x \mapsto tgx$ est dérivable et strictement positive sur $]0; \frac{\pi}{2}[$

$\Rightarrow g : x \mapsto Log(tgx)$ est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.

• $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[; g'(x) = \frac{(tgx)'}{tgx} = \frac{1 + tg^2x}{tgx}$.

b- $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[; g'(x) = \frac{1 + tg^2x}{tgx} > 0$

$\Rightarrow$ g est strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$

$\Rightarrow$ *g réalise une bijection de* $]0; \frac{\pi}{2}[$ *sur* $g\left(]0; \frac{\pi}{2}[\right)$.

$\star g\left(]0; \frac{\pi}{2}[\right) =] \lim\limits_{x \to 0^+} g(x); \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} g(x) [=] -\infty, +\infty[= IR$

car $x \to 0^+$ on a $tgx \to 0^+$ puis $Log(tgx) \to -\infty$

et quand $x \to \frac{\pi}{2}^-$ on a $tgx \to +\infty$.

$\oplus$ $h(0) = a$ avec $a \in]0; \frac{\pi}{2}[$

$\Leftrightarrow g(a) = 0 \Leftrightarrow Log(tga) = 0 \Leftrightarrow tga = 1 \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{4}$.

Conclusion : $h(0) = \frac{\pi}{4}$.

c- g est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[; g'(x) = \frac{1 + tg^2x}{tgx} \neq 0$

$\Rightarrow h = g^{-1}$ est dérivable sur $g\left(]0; \frac{\pi}{2}[\right) = IR$.

• $\forall x \in IR ; h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))} = \frac{tg(h(x))}{1 + tg^2(h(x))}$.

Or $\forall x \in IR ; g(h(x)) = x \Leftrightarrow Log[tg(h(x))] = x \Leftrightarrow tg(h(x)) = e^x$.

D'où $h'(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} = \frac{e^x}{e^x(e^{-x} + e^x)} = \frac{1}{e^{-x} + e^x} = \frac{1}{2} f(x)$